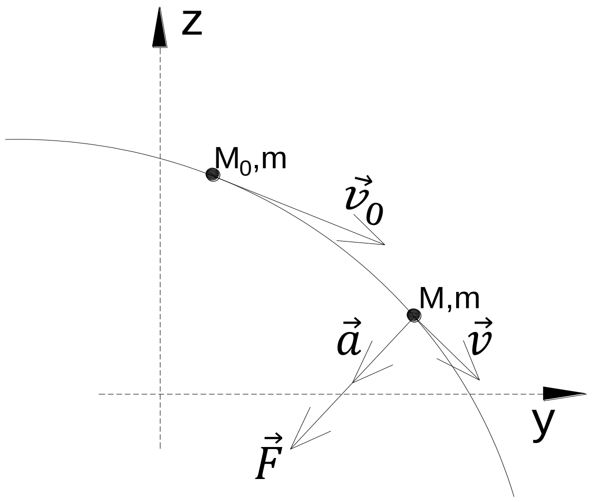
Krivolinijsko kretanje materijalne tačke u ravni

Teorema 2

Tačka se uvijek kreće u ravni određenoj pravcem sile i početne brzine.



$$\vec{F} = \{0, F_y, F_z\}$$

$$\vec{v}_0 = \{0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$$

Sila leži u ravni yOz. Takođe, neka i početna brzina $\vec{v}_0$ leži u istoj ravni.

Diferencijalne jednačine kretanja (7) projektovane na Dekartov koordinatni sistem su:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = F_y, \qquad m\ddot{z} = F_z$$

Integraljenjem prve jednačine dobijamo:

$$\dot{x} = c_1$$

$$x = c_1 t + c_2$$

Korišćenjem početnih uslova za

$$t = t_0 = 0, \qquad v_0 = \dot{x}_0 = 0 \;\; i \;\; x_0 = 0$$

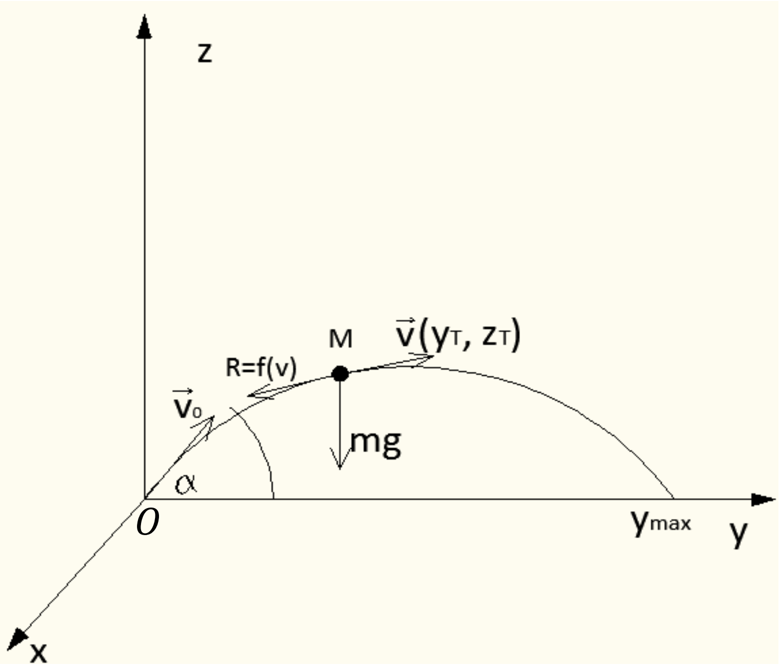
dobijamo rješenje za traženu jednačinu:

$$x = 0$$

Ravan $x = 0$, odnosno ravan yOz je ravan dejstva sile i početne brzine i u toj ravni se kreće materijalna tačka.

Kosi hitac u homogenom polju sile teže, u bezvazdušnom prostoru

Kosi hitac nastaje kada se materijalna tačka M, mase m, baci početnom brzinom $\overrightarrow{v_0}$ pod uglom α sa površine zemlje.



Neka je početni položaj tačke M u tački O nepokretnog Dekartovog pravouglog sistema Oxyz i neka početna brzina $\overrightarrow{v_0}$ leži u ravni yOz. U odnosu na ovako izabran sistem referencije početni uslovi kretanja su:

$$za\ t_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0 \quad i \quad \dot{y}_0 = v_0 cos\alpha, \qquad \dot{z}_0 = v_0 sin\alpha$$

Sila koja djeluje na tačku M je konstantna sila G u pravu ose z, usmjerena naniže

$$G = \{0,\ 0,\ -mg\}$$

Sila otpora R u proizvoljnoj tački M, u ovom slučaju, jednaka je nuli jer posmatramo tačku u bezvazdušnom prostoru.

Tačka se kreće u meridijanskoj ravni određenoj pravcem sile i početne brzine.

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu su:

$$m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = -mg$$

odnosno,

$$\ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = -g$$

Integraljenjem ovih jednačina i korišćenjem početnih uslova za brzinu, za $t_0 = 0, \qquad \dot{y}_0 = v_0 cos\alpha,$ $\dot{z}_0 = v_0 sin\alpha,$ dobijamo:

$$\dot{y} = v_0 cos\alpha$$

$$\dot{z} = v_0 sin\alpha - gt$$

Integraljenjem dobijenih jednačina za brzinu tačke uz korišćenje početnih uslova za položaj tačke za $t_0 = 0,\ \ y_0 = 0,\ \ z_0 = 0,$ dobijamo konačne jednačine kretanja tačke pri kosom hicu u bezvazdušnom prostoru:

$$y = v_0\, t\, cos\alpha$$

$$z = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t\ sin\alpha$$

Jednačinu putanje dobijamo eliminacijom parametra t iz jednačina kretanja, tako što nađemo t iz prve jednačine

$$t = \frac{y}{v_0 cos\alpha}$$

i zamijenimo u drugu.

Tražena jednačina putanje je:

$$z = \frac{-g}{2}\left(\frac{y^2}{v_0^2 cos\alpha^2}\right) + ytg\alpha$$

Tačka vrši krivolinijsko kretanje jer je trajektorija tačke parabola čija je osa paralelna osi Oz.

Kako na tačku dejstvuje konstantna sila $\vec{G}$ ona ne vrši pravolinijsko kretanje jer vektor početne brzine $\overrightarrow{v_0}$ nije kolinearan sa pravcem sile što je uslov za pravolinijsko kretanje tačke.

Za određivanje maksimalne visine penjanja tačke i njen domet koristimo dobijene jednačine kretanja kod kosog hica i kinematičke osobine tačke pri kretanju (da je brzina tangenta na putanju).

$$z_{max} = h = \frac{v_0^2 sin\alpha^2}{2g},$$

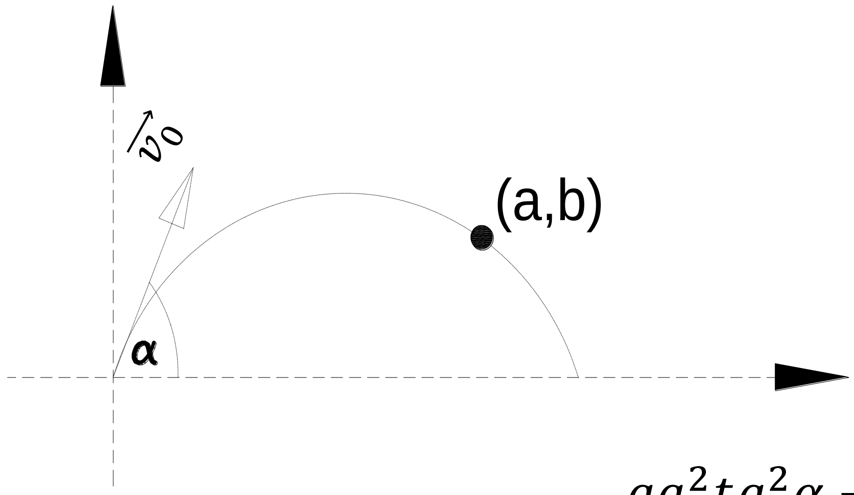
$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}, \quad \alpha = 90° \quad \text{(slučaj vertikalnog hica u bezvazdušnom prostoru)}$$

$$D = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}, \quad D_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \text{za} \quad \alpha = 45°$$

Zadatak

Odrediti uglove pod kojima treba hitnuti projektil, mjereno prema horizontali da bi pogodio tačku M (a,b). Početna brzina projektila je $\overrightarrow{v_0}$.

$$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}, \quad b = a\,tg\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}, \quad \text{gdje je} \quad cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$$



$$ga^2 tg^2\alpha - 2v_0^2 a\,tg\alpha + (ga^2 + 2bv_0^2) = 0$$

$$tg\alpha_{1/2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2a^2 - 2gbv_0^2}}{ga}$$

$$\alpha_{1/2} = arc\,tg\,\frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2a^2 - 2gbv_0^2}}{ga}$$

Neslobodno kretanje materijalne tačke

Za tačku kažemo da je slobodna ako može da zauzme bilo koji položaj u prostoru i za takvu tačku važi Njutnova jednačina (1).

Ukoliko tačka nije slobodna već se kreće po nepomičnoj površini (sl.1) čija je jednačina u Dekartovom koordinatnom sistemu:

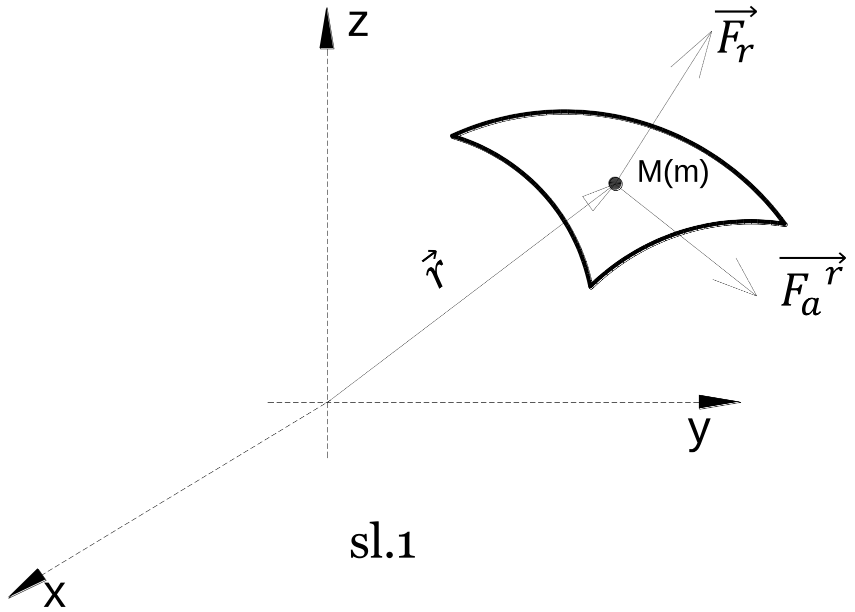
$$f(x, y, z) = 0$$

tada se korišćenjem II Njutnovog zakona diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke može napisati u obliku:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F_r{}^a} + \overrightarrow{F_r}$$

gdje su:

$\overrightarrow{F_r{}^a}$- rezultata aktivnih sila, $\overrightarrow{F_r}$ – reakcije veze



sl.1

Kod formiranja diferencijalne jednačine kretanja za neslobodnu tačku koristi se aksiom iz statike po kome svako neslobodno tijelo možemo smatrati slobodnim ako uklonimo veze, a ulogu veza zamijenimo silama, tj. reakcijama veza.

Ako je $\overrightarrow{F_r}^a$ aktivna sila koja djeluje na tačku, pri čemu se tačka kreće po idealno glatkoj površi, tada reakcija $\overrightarrow{F_r}$ ima pravac gradijenta odgovarajuće funkcije sa kojom je definisana površ f.

Grad ima pravac normale na površinu f:

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

tako da grad skalarne funckije f i reakcija veze $\vec{F_r}$ su kolinearni vektori.

Ukoliko površ nije idealna već hrapava reakcija veze odstupa od normale i sastoji se od dvije komponente tako da je:

$$\vec{F_r} = \overrightarrow{F_r^{\,n}} + \overrightarrow{F_r^{\,t}}$$

Tangencijalna komponenta $\overrightarrow{F_r^{\,t}}$ leži u tangencijalnoj ravni na površ f i proporcionalna je normalnoj komponenti reakcije a smjer suportan brzini $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{F_r^{\,t}} = -\mu\,\overrightarrow{F_r^{\,n}}\,\frac{\vec{v}}{v}$$

Tada jednačina kretanja ima oblik:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F_r^a} + \overrightarrow{F_r{}^n} + \overrightarrow{F_r{}^t}, \quad \text{odnosno}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F_r^a} + \lambda\, grad\ f - \mu\, \overrightarrow{F_r{}^n}\,\frac{\vec{v}}{v} \qquad (*)$$

Jednačina (*) naziva se diferencijalna jednačina materijalne tačke ili zapreminska jednačina I (prve) vrste.

Kada se tačka kreće po idealno glatkoj površini, jednačina kretanja tačke ima oblik:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F_r^a} + \lambda\, grad\ f, \ \text{gdje je}$$

$\overrightarrow{F_r{}^a}$- rezultata aktivnih sila

$\lambda\, grad\ f$ – reakcija veze

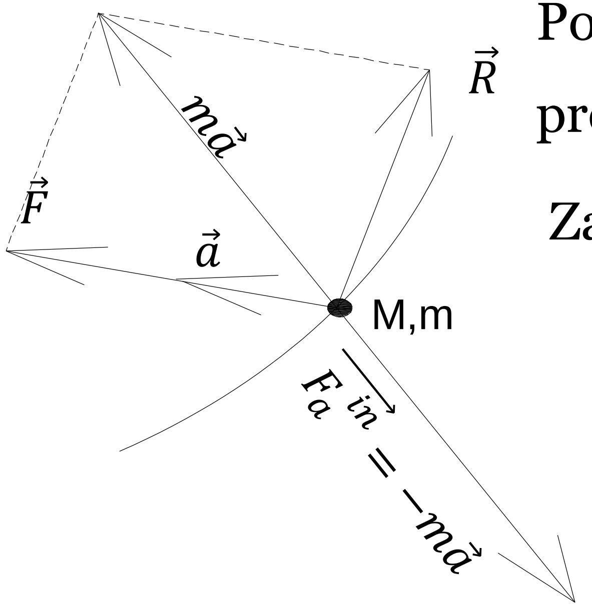
Kada se tačka kreće po idealno glatkoj površini, jednačina kretanja tačke ima oblik:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F_a} + \lambda\, grad\, f, \quad \text{gdje je}$$

$\overrightarrow{F_r}^{a}$- rezultata aktivnih sila

$\lambda\, grad\, f$ – reakcija veze

D'Alambert-ov princip za tačku



Posmatrajmo tačku M, mase m, na koju dejstvuju sila $\vec{F}$, pretpostavljajući da se tačka kreće po vezi.

Zamislimo silu $\overrightarrow{F_a{}^{in}} = -m\vec{a}$

$$m\vec{a} + (-m\vec{a}) = \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a})$$

$$\vec{F} + \vec{R} + \overrightarrow{F_a{}^{in}} = 0$$

Ako stvarnim silama koje djeluju na tačku, dodamo neku silu koja je jednaka proizvodu mase i ubrzanja sa suprotnim znakom onda dobijamo relaciju koja ima sve osobine odgovarajuće statičke relacije, naime zbir svih sila jednak je nuli.

Ova metoda se naziva kineto-statika. Znači radi se o kretanju koje interpretiramo statičkim relacijama.

$\overrightarrow{F_a^{in}}$ – inercijalna sila

Inercijalna sila ne dejstvuje na materijalnu tačku, već na tijelo koje saopštava materijalnoj tački dato ubrzanje.

D'Alambert-ov princip je pogodan za rješavanje kretanja i dređivanja reakcija veze pri kretanju neslobodne materijalne tačke. Primjenjuje se ako je poznat pravac i smjer vektora ubrzanja materijalne tačke , da bi se odredila inercijalna sila.